

1. Sistemas diferenciales bidimensionales de coeficientes constantes

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + b_1(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + b_2(t) \end{cases}$$

donde a, b, c y d son coeficientes reales, $b_1(t)$ y $b_2(t)$ son funciones reales definidas y continuas sobre un intervalo $J \subset \mathbb{R}$.

Sean $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz del sistema y $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$. El sistema se puede escribir en la forma de ecuación diferencial vectorial de la forma

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \quad (c)$$

Una solución de (c) en J es cualquier vector columna $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ cuyas elementos son funciones diferenciables que verifican el sistema (c).

1.1. Estructura del conjunto de las soluciones

Sea \mathbb{K} el cuerpo de los números reales o el cuerpo de los números complejos. Notemos por \mathcal{S}_h el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea

$$X'(t) = AX(t) \quad (h)$$

en J . Si $X_1(t), X_2(t) \in \mathcal{S}_h$, entonces para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ el vector $X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$ también es una solución de (h) en J .

Se verifica que dos soluciones $X_1(t), X_2(t) \in \mathcal{S}_h$ son linealmente independientes si una no es un múltiplo constante de la otra.

Se tiene que \mathcal{S}_h tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{K} de dimensión

2. Luego, si $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{pmatrix}$, $X_2(t) = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{pmatrix}$ son soluciones de (h) linealmente independientes en J entonces la solución general de (h) en J es

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{K}$$

Sea la matriz fundamental $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{pmatrix}$. Entonces la solución general se puede expresar en la forma

$$X(t) = \Phi(t)C,$$

donde $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Se verifica que $\Phi(t)$ es no singular ($|\Phi(t)| \neq 0$) y se cumple $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.

Usando la exponencial de una matriz e^{At} , cuya derivada es $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$, la solución general viene dada por $X(t) = e^{At}C$.

El conjunto \mathcal{S}_c de todas las soluciones de la ecuación completa en J tiene estructura de espacio afín sobre el espacio vectorial \mathcal{S}_h . Si $X_p(t) \in \mathcal{S}_c$, entonces toda solución $X(t) \in \mathcal{S}_c$ se puede expresar como

$$X(t) = X_p(t) + c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$$

para ciertas constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.

1.2. Bases Fundamentales de sistemas bidimensionales

Sea la ecuación $X'(t) = A X(t)$ con $A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ y $X(t) = (x(t), y(t))^T$. Se tienen los siguientes casos según cómo sean los autovalores de A :

- 1** Si $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces una base fundamental estará formada por las funciones vectoriales

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_1 &\in \ker(A - \lambda_1 I), \\ X_2(t) &= e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_2 &\in \ker(A - \lambda_2 I). \end{aligned}$$

- 2** Si $\sigma(A) = \{\lambda\}$, es decir, la matriz A tiene un autovalor doble, entonces se tendrán las dos posibilidades siguientes:

- 2.1** $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 2$ (luego $\ker(A - \lambda I) = \mathbb{R}^2$), en cuyo caso una base fundamental estaría formada por las funciones

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t} \mathbf{v}_1, \\ X_2(t) &= e^{\lambda t} \mathbf{v}_2, \end{aligned} \quad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2 \text{ l.i.}$$

(Notaremos abreviadamente l.i. por linealmente independientes).

- 2.2** $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 1$, en cuyo caso una base fundamental sería

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t} \mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_1 &\in \ker(A - \lambda I), \\ X_2(t) &= e^{\lambda t} (I + (A - \lambda I)t) \mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_2 &\in \mathbb{R}^2 \setminus \ker(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Como $\ker(A - \lambda I)^2 = \mathbb{R}^2$, si $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \ker(A - \lambda I)$ entonces $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 \in \ker(A - \lambda I)$ y es un vector no nulo, la base fundamental vendría dada por:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t} \mathbf{v}_1, \\ X_2(t) &= e^{\lambda t} (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 t) \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_2 &\notin \ker(A - \lambda I) \\ \mathbf{v}_1 &= (A - \lambda I)\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$